vestibular inverno 2008

Universidade Estadual de Maringá

Prova 3 – Matemática

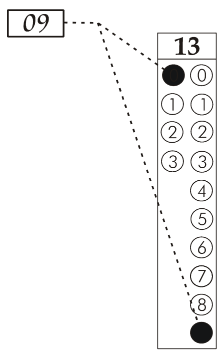
QUESTÕES OBJETIVAS

N.º DE ORDEM: **N.º DE INSCRIÇÃO:**

NOME DO CANDIDATO:

INSTRUÇÕES PARA A REALIZAÇÃO DA PROVA

1. Confira os campos N.º DE ORDEM, N.º DE INSCRIÇÃO e NOME, conforme o que consta na etiqueta fixada em sua carteira.
2. Confira se o número do gabarito deste caderno corresponde ao constante na etiqueta fixada em sua carteira. Se houver divergência, avise, imediatamente, o fiscal.
3. É proibido folhear o caderno de provas antes do sinal, às 9 horas.
4. Após o sinal, confira se este caderno contém 20 questões objetivas e/ou qualquer tipo de defeito. Qualquer problema, avise, imediatamente, o fiscal.
5. O tempo mínimo de permanência na sala é de 1h e 30min após o início da prova.
6. No tempo destinado a esta prova (4 horas), está incluído o de preenchimento da Folha de Respostas.
7. Transcreva as respostas deste caderno para a Folha de Respostas. A resposta correta será a soma dos números associados às proposições verdadeiras. Para cada questão, preencha sempre dois alvéolos: um na coluna das dezenas e um na coluna das unidades, conforme exemplo ao lado: questão 13, resposta 09 (soma das proposições 01 e 08).
8. Se desejar, transcreva as respostas deste caderno no Rascunho para Anotação das Respostas constante nesta prova e destaque-o, para retirá-lo hoje, nesta sala, no horário das 13h15min às 13h30min, mediante apresentação do documento de identificação do candidato. Após esse período, não haverá devolução.
9. Ao término da prova, levante o braço e aguarde atendimento. Entregue ao fiscal este caderno, a Folha de Respostas e o Rascunho para Anotação das Respostas.



Corte na linha pontilhada.

RASCUNHO PARA ANOTAÇÃO DAS RESPOSTAS

N.º DE ORDEM: **NOME:**

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

MATEMÁTICA

01 – Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$:

$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -1 \leq y \leq 1\}$;

$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$;

$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1\}$;

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}\}$;

$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq y \leq 1\}$;

$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \text{ e } -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq 0\}$.

É **correto** afirmar que

01) $C \cap E = A$.

02) $(D \cup F) \cap A = B$.

04) $B \cap D \cap F = \{(-1, 0), (1, 0)\}$.

08) $(D \cup F) \cap B = B$.

16) $(D \cup F) \cap A = B$.

02 – Considere as matrizes quadradas de ordem 9:

$A = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j; \end{cases}$

$B = (b_{ij})$ tal que $b_{ij} = i - 2j$;

$C = (c_{ij})$ tal que $c_{ij} = -2i + j$;

$D = (d_{ij})$ tal que $d_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i > j \\ 2i - j, \text{ se } i \leq j. \end{cases}$

Assinale o que for **correto**.

01) A é a matriz identidade e, portanto, $A.B=A$.

02) $B^t.C = C^2$.

04) Se $E = (e_{ij}) = C.A$, então $e_{86} = 10$.

08) $\det(D^{-1}) = \dfrac{1}{9!}$.

16) $\det(B) = \det(C)$.

Rascunho

GABARITO 4

03 – Seja $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função da forma $f(x) = a.b^x$ em que a e b são números reais não nulos e $\mathbb{R}_+^*$ indica o conjunto dos números reais positivos. Se $A(0,1)$ e $B(1,3)$ são dois pontos que pertencem ao gráfico de f, então é **correto** afirmar que

01) $a = 1$ e $b = 3$.
02) f é uma função decrescente.
04) tem-se que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
08) $f^{-1}(x) = \log_3 x$.
16) o gráfico de f intercepta o eixo Ox para algum $x < 0$.

04 – Assinale o que for **correto** com respeito às matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x & -2 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & x & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

e à equação $A.B = C$.

01) Não existem valores reais para x, y e z que satisfazem a equação dada.
02) Existem infinitos valores reais para x, y e z que satisfazem a equação dada.
04) Existe apenas um valor real para x, um para y e um para z que satisfazem a equação dada.
08) A matriz A é invertível para todo $x \neq 0$.
16) Para obtermos uma solução da equação dada, devemos ter $y = 2$.

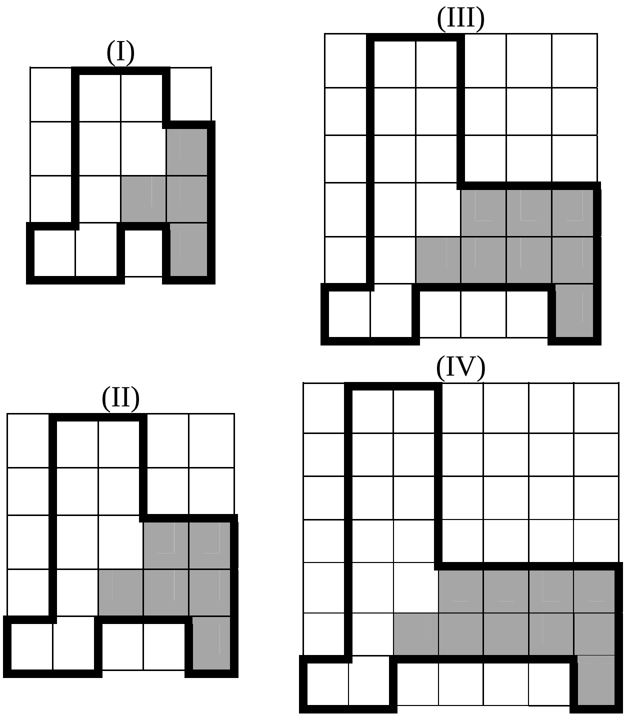
05 – No conjunto dos números reais não-negativos $\mathbb{R}_+$, definimos a operação $x \otimes y = \dfrac{x+4y}{1+xy}$. Com respeito a essa operação, assinale o for **correto**.

01) Existe $x \in \mathbb{R}_+$, tal que $x \otimes y = x$ para todo y real não-negativo.
02) $(1 \otimes 2) \otimes 3$ é um número inteiro.
04) $x \otimes y = y \otimes x$ para todos $x, y \in \mathbb{R}_+$.
08) Em $\mathbb{R}_+$, não existe solução para a equação $x \otimes x = x$.
16) $1 \otimes 2 = 4 \otimes \dfrac{1}{8}$.

Rascunho

GABARITO 4

06 – Cada uma das regiões poligonais, na seqüência de figuras abaixo, é construída sobre quadrados com lados de 4, 5, 6 e 7 unidades de comprimento, sendo cada um dos quadrados interiores 1 unidade de área. Considere que essas figuras são as 4 primeiras, nessa ordem, de uma seqüência infinita que segue esse padrão.



Em relação às regiões poligonais demarcadas em negrito e às regiões sombreadas, em cada figura da seqüência, é **correto** afirmar que

01) as áreas das regiões poligonais demarcadas em negrito, na seqüência de figuras, estão em uma progressão geométrica.
02) a área da 117.ª região poligonal demarcada em negrito, nessa seqüência, será 475 unidades de área.
04) a área da região sombreada da *n*-ésima figura, nessa seqüência, pode ser expressa por $2n^2 - 4n + 6$.
08) as áreas das regiões sombreadas, em cada uma das figuras da seqüência, formam uma progressão aritmética de razão 2.
16) existe uma região poligonal demarcada em negrito, nessa seqüência, cuja área é um número par.

Rascunho

07 – Sejam r e s duas retas no plano cartesiano definidas pelas equações $y = x + 1$ e $\frac{x}{5}+\frac{y}{25}=1$, respectivamente. É **correto** afirmar que

01) as retas r e s são perpendiculares.
02) as retas r e s são concorrentes.
04) a área da região delimitada pelas retas r e s e pela reta t que passa pelos pontos $P(2,3)$ e $Q(5,0)$ é 6 unidades de área.
08) a área do triângulo determinado pelos pontos de interseção da reta s com os eixos Ox e Oy e pela origem do sistema cartesiano xOy é 125 unidades de área.
16) a reta r e a reta t que passa pelos pontos $P(2,3)$ e $Q(5,0)$ não determinam um único plano.

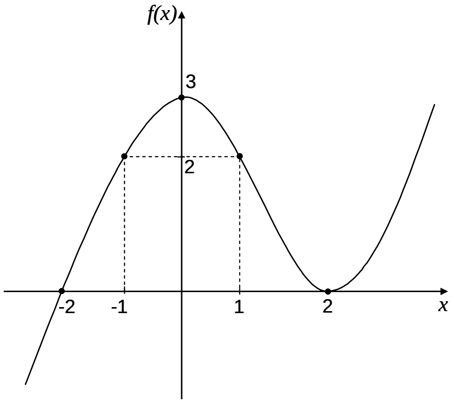
08 – Considere A, B e C vértices de um triângulo, M um ponto sobre o lado $\overline{AB}$ e N um ponto sobre o lado $\overline{AC}$, de tal forma que $\overleftrightarrow{MN} // \overleftrightarrow{BC}$ (ou seja, a reta que contém $\overline{MN}$ seja paralela à reta que contém o lado $\overline{BC}$). No triângulo AMN, considere um ponto P sobre o lado $\overline{AM}$ e um ponto Q sobre o lado $\overline{AN}$, de tal forma que $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{MN}$. Assinale o que for **correto**, adotando a notação RS para a medida do segmento $\overline{RS}$.

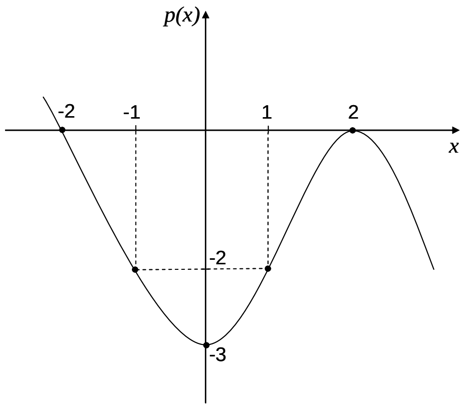
01) Os triângulos ABC, AMN e APQ são semelhantes.
02) Os ângulos $A\hat{P}Q$, $P\widehat{M}N$ e $M\hat{B}C$ são congruentes.
04) $\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$.
08) $\frac{AP}{AQ}=\frac{PM}{QN}=\frac{MB}{NC}$.
16) Se $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}=k$, então a razão entre os perímetros dos triângulos APQ e ABC é 1.

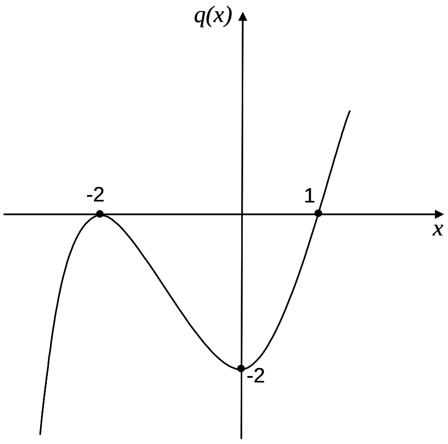
Rascunho

GABARITO 4

09 – As figuras a seguir apresentam os gráficos de três funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, p: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e q: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.







Analisando esses gráficos, assinale o que for **correto**.

01) $\left(f \circ q \right)(0) = 0$.

02) $\left(p \circ q \circ f \right)(2) = 0$.

04) $\left(f - p \right)(1) = 0$.

08) $\left(p \circ p \right)(1) = \left(f \circ f \right)(1)$.

16) Se restringirmos o domínio da função f ao intervalo [0,2], então $\left(p \circ f^{-1} \right)(3) = 3$.

Rascunho

10 – Em um sistema de eixos ortogonais *xOy*, em que as unidades correspondem a quilômetros, há três antenas de operadoras de celulares com raio de alcance até 10 km. As antenas estão localizadas nos pontos A(0,0), B(3,0) e C(-4,-4). Em um dado instante, as três antenas captam uma mesma ligação. Se a antena localizada em A identificou a ligação a 5 km de distância e a antena localizada em B identificou a ligação a 4 km de distância, é **correto** afirmar que

01) a distância entre as antenas localizadas em B e C é 9 km.
02) o ponto que indica onde foi realizada a ligação e os pontos A, B e C são vértices de um paralelogramo.
04) os pontos que indicam as antenas A, B e C são colineares.
08) a antena localizada em C identificou a ligação a uma distância de 7 km.
16) o ponto que indica onde foi realizada a ligação e os pontos A e B são vértices de um triângulo retângulo.

11 – Em uma circunferência com raio de medida *r*, temos um trapézio isósceles inscrito. Sabendo que o comprimento da base maior do trapézio é igual à medida do diâmetro e a base menor tem medida igual à do raio, é **correto** afirmar que

01) a soma dos ângulos internos do trapézio é 180^0.
02) o perímetro do trapézio é $5r$.
04) a área do trapézio é $\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}$.
08) três lados do trapézio medem r.
16) o trapézio possui um ângulo interno de medida $\frac{\pi}{3}$.

Rascunho

GABARITO 4

12 – Em um sistema de eixos ortogonais xOy, considere uma circunferência C dada pela equação $x^2 + y^2 + 6x + 4y + 12 = 0$. Assinale o que for **correto.**

01) A circunferência C está contida no primeiro quadrante do sistema cartesiano.
02) O diâmetro da circunferência C mede 1 unidade de comprimento.
04) Se P(a,b) é o centro da circunferência C, então a e b satisfazem a equação $2^{x^2+5x+6} = 1$.
08) A reta de equação $y = \frac{2}{3}x$ divide o círculo delimitado pela circunferência C em duas regiões de mesma área.
16) O volume de uma esfera que tem o mesmo raio da circunferência C é $\frac{4}{3}\pi$ unidades de volume.

13 – Considerando $\log_3 2 = a$ e $\log_3 5 = b$, é **correto** afirmar que

01) $\log_3 162 = a + 4$.
02) $\log_3 \sqrt{75} = \frac{b}{2}$.
04) $\log_{15} 12 = \frac{1+a}{1+b}$.
08) o valor de $x \in \mathbb{R}$ na equação $5^x = 10$ é $\frac{a}{b} + 1$.
16) $\log 72 = \frac{3a}{a+b}$.

14 – Na divisão do polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 12$, em que $a, b \in \mathbb{R}$, por $x^2 - 5x + 5$, obtém-se o quociente igual ao resto. Desse modo, é **correto** afirmar que

01) $a = b$.
02) $p(x)$ é divisível por $x - 2$.
04) $p(x)$ é divisível por $x + 2$.
08) o resto da divisão de $p(x)$ por $x + 1$ é zero.
16) as raízes de $p(x)$ são –2, 2 e 3.

Rascunho

GABARITO 4

15 – Em uma sala, há seis lâmpadas com interruptores independentes que não identificam a lâmpada que controlam. Assinale o que for **correto**.

01) Se todas as lâmpadas estão apagadas, então há 15 modos distintos de iluminar a sala acionando 4 interruptores.
02) Se todas as lâmpadas estão apagadas, então há 15 modos distintos de iluminar a sala acionando 2 interruptores.
04) Se há somente 3 lâmpadas acessas, então, ao acionarmos um interruptor ao acaso, a probabilidade de acionarmos mais uma lâmpada é $\frac{1}{3}$.
08) Se todos os interruptores estão acionados, porém há 2 lâmpadas queimadas, então, escolhendo um interruptor ao acaso, a probabilidade de este controlar uma lâmpada queimada é $\frac{1}{2}$.
16) Há 12 modos distintos de escolhermos uma lâmpada e um interruptor.

16 – Dado um número complexo $z = a + bi$, indicamos por $\bar{z}$ seu conjugado. Desse modo, assinale o que for **correto**.

01) $\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i.\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = i$.
02) Se $z \in \mathbb{C}$ é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então $\bar{z}$ é raiz do mesmo polinômio.
04) $\frac{1}{a.i} = \frac{i}{a}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ em que $a \neq 0$.
08) $z - \bar{z} \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
16) $i^2 + i^4 + i^6 + i^8 + i^{10} = i^{2+4+6+8+10}$.

17 – Se $x \in \mathbb{R}$ com $0 \leq x < 2\pi$ satisfaz a equação

$$\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1 + \text{sen}(x),$$

então é **correto** afirmar que

01) a equação admite apenas três soluções distintas.
02) a soma das soluções da equação é igual a 2π.
04) $\text{sen}(x) \leq 0$ para toda solução x da equação.
08) $\cos(x) \geq 0$ para toda solução x da equação.
16) as soluções da equação são menores que π.

Rascunho

18 – Com respeito a tetraedros (pirâmides de base triangular) e a hexaedros regulares (cubos), assinale o que for **correto**.

01) Em um tetraedro, temos um par de arestas que estão contidas em retas paralelas.
02) Em um tetraedro, temos um par de arestas que estão contidas em retas reversas.
04) Em um hexaedro regular, a soma do número de vértices com o número de faces é igual ao número de arestas.
08) Em um hexaedro regular, a reta que contém uma aresta é perpendicular a quatro planos distintos que contêm faces desse hexaedro regular.
16) O número de vértices e o número de arestas de um hexaedro regular são, respectivamente, o dobro do número de vértices e o dobro do número de arestas de um tetraedro.

19 – Um paralelepípedo reto de base quadrada e altura medindo h possui área total $16h^2$. É **correto** afirmar que

01) a aresta da base mede o dobro da altura do paralelepípedo.
02) o paralelepípedo é um cubo.
04) a diagonal do paralelepípedo mede $2h\sqrt{2}$.
08) a área lateral do paralelepípedo é metade da área total.
16) o volume do paralelepípedo é $4h^3$.

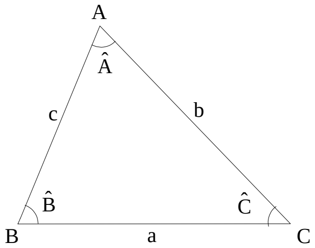
20 – Considere um triângulo ABC retângulo em A e um ponto D no segmento $\overline{AB}$ tal que a medida de $\overline{BD}$ seja igual à medida de $\overline{DC}$. Sabendo que a medida de $\overline{BC}$ é 5 cm e a medida de $\overline{AB}$ é *4* cm, assinale o que for **correto**.

01) A área do triângulo ABC é *12* cm^2.
02) Se a medida do ângulo $A\hat{D}C$ é α, então $\text{sen}(\alpha) = \frac{3}{5}$.
04) Se a medida do ângulo $C\hat{B}D$ é β, então $\text{tg}(\beta) = \frac{3}{4}$.
08) Os segmentos $\overline{DA}$ e $\overline{DB}$ possuem mesma medida.
16) Os ângulos $B\hat{C}D$ e $C\hat{B}D$ são congruentes.

Rascunho

GABARITO 4

MATEMÁTICA – Formulário

Trigonometria	$\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \operatorname{sen}(y)\cos(x)$ $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ $\operatorname{tg}(x \pm y) = \dfrac{\operatorname{tg}(x) \pm \operatorname{tg}(y)}{1 \mp \operatorname{tg}(x)\operatorname{tg}(y)}$	 *Lei dos senos:* $\dfrac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \dfrac{b}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \dfrac{c}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$ *Lei dos cossenos:* $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A})$
Análise Combinatória	$P_n = n!$ $A_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$	$C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_{n,i}\, a^{n-i}\, b^i$
Geometria Plana e Espacial	Área do losango: $A = \dfrac{d\,D}{2}$ Área do trapézio: $A = \dfrac{(b+B)h}{2}$ Área do círculo: $A = \pi R^2$ Área lateral do cilindro: $A = 2\pi R h$ Área lateral do cone: $A = \pi R g$ Área da superfície esférica: $A = 4\pi R^2$	Volume do cubo: $V = a^3$ Volume do prisma: $V = B \cdot h$ Volume da pirâmide: $V = \dfrac{B \cdot h}{3}$ Volume do cilindro: $V = \pi R^2 h$ Volume do cone: $V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ Volume da esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$
Progressões	Progressão Aritmética (P. A.): $a_n = a_1 + (n-1)r$ $S_n = \dfrac{(a_1 + a_n)n}{2}$	Progressão Geométrica (P. G.): $a_n = a_1 q^{n-1}$ $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 q^n}{1-q}, q \neq 1$ $S_\infty = \dfrac{a_1}{1-q}, \lvert q \rvert < 1$
Geometria Analítica	Área do triângulo de vértices $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ e $R(x_3, y_3)$: $A = \dfrac{1}{2}\lvert D \rvert$, onde $D = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$	Distância de um ponto $P(x_0, y_0)$ à reta $r: ax + by + c = 0$: $d_{P,r} = \left\lvert \dfrac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\rvert$

GABARITO 4